物理学最前線

6

大槻義彦 編

表面の微視的構造

菅野　暁・浜田典昭

モノポール

林　浩一

固体の構造相転移と中性子散乱

山田安定

共立出版株式会社

刊行にあたって

20世紀の物理学の進歩はめざましい．1年間になされる研究の発展は，19世紀物理学の発展の10年分にも20年分にも匹敵するとさえいわれる．そしてまた，物理学の進歩は間髪を入れず産業に応用され，技術を革新し，市民の生活に大きな影響を与え，それがさらに物理学そのものを発展させる原動力にもなっている．

かくして，たった1年間の物理学の発展にすら，物理学自身追いついてゆけないという悲喜劇が生まれる．物理学会誌にのる多くの解説は，自分の専門とする分野以外さっぱり理解できないというのが現状であろう．もはや物理学者にすら理解できなくなった物理学など，文化として，人類の共通の遺産として，はたして存在価値のあるものであろうか．

もちろん，情報過多の今日，この進歩しすぎる難解な物理学を，やさしく解説しようという試みは山とある．とくに“*Physics Today*”や“*Scientific American*”(邦訳『サイエンス』)，『自然』などはきわめてユニークで意欲的で，それなりに成功しているといえるであろう．しかし，これらはあくまでも雑誌であり，たかだか数ページの内容であるから，最先端の物理学を紹介するには不十分である．一方，最先端の専門書など難解をきわめ，しかもたいてい英文である．

そこで，“物理学の最前線”をとりあげ，十分な分量でやさしく解説する刊行物が望まれる．つまるところ，シリーズ『物理学最前線』は科学雑誌がもつやさしいトピックス解説の手法と，単行本がもつゆとりと専門性をミックスさせ，わが国科学文化に寄与しようというものである．これによって“専門バカ”を生む物理学の体質を改善し，大学・高校などの教員，および専門研究者・エンジニアに最先端の物理学を広め，専門間の交流をうながし，物理学をふたたび豊かな文化の一員に復帰させようというものである．

大槻義彦

目　　次

表面の微視的構造＝菅野　暁・浜田典昭

1 章　結晶のマクロな形とミクロな形 ……………… 3
1·1　雪の結晶 …………………………………………… 3
1·2　表面張力 …………………………………………… 4
1·3　微粒子の形 ………………………………………… 5
1·4　表面の凹凸度 ……………………………………… 6
1·5　表面のミクロな構造 ……………………………… 7
2 章　表面の対称性 ……………………………………14
2·1　2次元ブラベ格子 …………………………………14
2·2　2次元空間群 ………………………………………17
2·3　逆格子空間 …………………………………………22
2·4　電子の固有状態 ……………………………………25
2·5　表面構造の記号 ……………………………………28
3 章　ミクロな形を決めるもの ………………………32
3·1　イオン結晶 …………………………………………32
3·2　共有結合結晶（半導体）……………………………35
3·3　遷移金属——Mo，W(001) 表面 ……………………43
3·4　遷移金属，貴金属の長周期構造 …………………48
4 章　最近の話題 ………………………………………50
4·1　整合・不整合相転移 ………………………………50
4·2　Si(111)7×7 …………………………………………55
4·3　W(001)-Cs の仕事関数 ……………………………61
4·4　侵入型吸着 …………………………………………63
5 章　まとめ ……………………………………………66
付録 I　金属の清浄表面…………………………………69
　　II　非金属の清浄表面………………………………71

モノポール＝林　浩一

1 章　概　説 ……………………………………………79
2 章　ディラック・モノポール ……………………………84
2・1　マックスウェル方程式 ……………………………84
2・2　モノポールの導入 …………………………………86
2・3　ゲージ不変性 ………………………………………90
2・4　ディラックの量子化条件 …………………………91
2・5　アハロノフ－ボーム効果 …………………………92
2・6　電磁場の角運動量 …………………………………95
2・7　量子化条件のもたらすもの ………………………98
3 章　ゲージ・モノポール ……………………………… 101
3・1　ソリトン ……………………………………………… 101
3・2　第二種超伝導体 ……………………………………… 106
3・3　ビリアル定理 ………………………………………… 109
3・4　ヒッグス機構 ………………………………………… 111
3・5　ト・ホーフト－ポルヤコフのモノポール ……… 114
3・6　大統一理論とモノポール …………………………… 119

固体の構造相転移と中性子散乱＝山田安定

序　章 ……………………………………………………… 129
1 章　相転移と対称性 …………………………………… 131
1・1　対称性の変化 ………………………………………… 131
1・2　秩序変数－1…………………………………………… 132
1・3　秩序変数－2…………………………………………… 134
2 章　中性子散乱と一般化感受率 ……………………… 136

2・1　ゆらぎと感受率 …………………………………… 136
2・2　ゆらぎのダイナミックス ………………………… 138
2・3　中性子の固体による散乱 ………………………… 139
2・4　中性子の散乱断面積と秩序パラメータのゆらぎ
の相関，一般化感受率 …………………………… 144
3 章　相転移の臨界現象 ………………………………… 147
3・1　現象論 ………………………………………………… 147
3・2　微視的理論 ………………………………………… 150
3・3　空間的相関の発達 ………………………………… 151
3・4　ゆらぎのスローダウン …………………………… 152
3・5　励起のソフト化 …………………………………… 154
4 章　励起のソフト化と緩和のスローダウン
——結合系の相転移 ………………………………… 157
4・1　結合系 ………………………………………………… 157
4・2　電子－格子系 ……………………………………… 158
4・3　プロトン－格子系 ………………………………… 165
4・4　イジングスピン－格子系 ………………………… 169
5 章　不整合相転移 ………………………………………… 176
5・1　不整合相 …………………………………………… 176
5・2　A_2BX_4 型強誘電体 ……………………………… 180
5・3　不整合相転移のダイナミックス ………………… 184

モノポール

林　浩一

1章　概　説

モノポールとは一口にいって磁石の“半分”，すなわちN極だけ（またはS極だけ）の磁石のことである．

通常の電磁気学では，電荷があるとこれを中心として電場 $\boldsymbol{E}$ が四方にわき出す．電荷が運動すると（すなわち電流があると）そのまわりに磁場 $\boldsymbol{B}$ の回転ができる．特に円電流のつくる磁場を考えると，これは磁石のつくる場と同じである．逆に磁石は円電流と同等とみなせる（ミクロには，これは電子の（自転も含めた）回転運動に起因する）．したがって，回転電流を一つ定めるごとに一つの磁石が（すなわちNとSが同時に）決まってしまう．その限りでは磁石の半分は原理的に出てこない．つまり荷電粒子から出発して電磁気学をつくる限りモノポールは出てこない．言い方を換えれば，モノポールは存在しないという仮定の下に通常の電磁気学はつくられているのである．

モノポール，つまり磁場の源として $\boldsymbol{B}$ の発散がゼロにならないものがもしあったとしたらどうなるか．電磁気学はどのような変更を受けるのか．古典力学の範囲では何の問題も現れない．形式的にマックスウェル方程式の右辺に磁荷と磁流を入れてやればよい．ところが量子論になると話は変わってくる．1931 年にディラック[1] はモノポールが量子論と両立するためにはモノポールの磁荷の強さがある条件を満足しなければならないことを示した．これをディラックの量子化条件と呼ぶ（§ 2·4 参照）．この条件からただちに

“もしモノポールが存在すると電荷が量子化される”．

ことが結論できる．素粒子の電荷は電子の電荷を単位としてすべてその整数倍のものしか見つかっていない．電子電荷の $\sqrt{2}$ 倍とか 3.14 倍の電荷をもつ

素粒子が見つかったためしはないがこれはなぜか．一つの答としてモノポールがあればよいということになる*．

このディラックの論文が出てから，電荷の量子化，モノポールを含む電磁場の量子化，$\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ 双対性といったアカデミックな興味とともに，もっとナイーブに「磁石の半分はないだろうか」という人間の夢を追って，以来モノポール探しは世界中で行われてきた．まず加速器を用いてモノポールをつくり出す試み，岩石や海底の泥の中に，隕石や月の石に，さらに宇宙線中に，とあらゆる模索を行ったが一つも見つからなかった**．1981 年，イタリアのトリエステでディラック・モノポール 50 年を記念して世界中の学者が集まりモノポール国際会議が開かれた．当然，始祖ディラックも招待されたが，これに対して彼は丁重な断り状を送っている．もうこの年(とし)でそんな遠いところまで行けない（現在，彼は 71 歳でアメリカのフロリダに住んでいる）．だいいち

“私はモノポールの存在を信じておりません．”***

生みの親にも見放されてしまったモノポールだが，それでもまだ世界中でモノポール探しの実験が行われているし，また理論家は次々と新しいモノポール理論を発表している[3]．これは何故だろうか．

一つにはゲージ理論の発展があげられる．これにつては3章で詳しく述べるが，一般に自発的対称性の破れを含むような非アーベル・ゲージ理論では理論の中からモノポールが必然的に出てくることが示される．特に，弱い相互作用，電磁相互作用，強い相互作用の三つを統合した大統一理論を考えるとモノポールの質量が予言できて，その大きさは 10^{16} GeV くらいになる．陽子質量が大体 1 GeV だから実にそれより 16 ケタ大きい（アメーバ1匹と同じくらいになる）．このように馬鹿でかい質量をもっているためにまず加速器などで人工的につくることは絶対に不可能である（現在，世界最大の加速器で 540 GeV だから 13 ケタたりない）．慣性が大きいので地球や月などは簡単に通り抜け

* なお，§ 2·7 参照．

** モノポールが「発見」された例はこれまでにも二，三あったが，いずれもその後の検討で否定された．

*** I am inclined to believe that monopoles do not exist.[2]

てしまい，たとえ宇宙線粒子として空から降ってきたとしても岩石などにはつかまらない．また，例えば銀河磁場によって加速されるとしてもそのスピードは非常に遅く（光速の1000分の1くらい），これまでの宇宙線実験（比例計数管やシンチレーター）と時間スケール（検出器中の通過時間）が全く違うし，またエネルギー損失も相対論的スピードの場合と比べてずっと小さいために，通常の雲母やルーサイトによる固体飛跡検出法も使えない．

これと直接関連して，遅いモノポールと物質中の電子，原子，原子核との磁気的相互作用という物性的な分野の研究が新たに必要となってくる[13]．さらには宇宙線モノポールの流量（flux）がある程度予測できて，地上では大体1年間に 1000 m^2 に1個ふってくる勘定になる[14] ので小さな検出器ではなかなかつかまらない．したがってこれまでの古いモノポール探しの実験はほとんど無意味であったといえる．新しい意味でのモノポール探し（大質量，小さな速度，少ない流量）の実験は現在，日本も含めて世界中で行われており，その意味ではモノポール探しはまだはじまったばかりであるともいえる[15]．

10^{16} GeV というエネルギーは，地上実験や星の内部といったスケールでは到底つくりえず，宇宙初期のビッグ・バング直後を考えなければならない．この場合は面白いことにモノポールが出来すぎて困ることになる（宇宙がモノポールで充満してしまう）．それをさけるために新しい宇宙論をつくる必要が出てくる（inflationally universe[16]）．

宇宙論とならんで，いったん宇宙初期に生成されたモノポールがその後宇宙空間をさまよい歩くと，その磁気相互作用を考えることによって銀河間磁場，銀河磁場，太陽磁場，その生成と減衰のメカニズム，さらには中性子星とハーローとの関連などの宇宙物理学との兼ね合いといった問題が出てくる．

素粒子論の領域ではモノポールと荷電粒子の相互作用，散乱束縛問題などの現象論と，場の理論としての定式化（量子化とくりこみ）の問題が現れる．特に，最近ゲージ・モノポールの内部構造と関連してリュバコフ効果という考え方が見いだされた[17]．これはモノポールをとりまくフェルミオンの雲の影響でモノポールが一種の触媒の役割を果たして陽子が崩壊する現象である．これが

本当ならば，大統一理論の検証[15]と直接かかわってくる．

数学的にはゲージ・モノポールはソリトン解として現れるため，理論の位相的(ホモトピー論的)構造と結びついてくる．またディラックのひも (§ 2・2) をさけるためにファイバー・バンドルの考えを導入し，ゲージ理論の幾何学化という面での発展も見られる[18]．このように宇宙論，宇宙物理学，太陽地球物理学，物性論，宇宙線物理，素粒子論のすべての分野に対して，モノポールという視点から新しい視野が開けてきたのである．

1982 年2月 14 日，スタンフォード大学のキャブレラは超伝導コイルを置いてコイルを貫く磁束の変化を調べていたところ，突如として顕著な磁束変化を認めた．その変化はまさにディラックの量子化条件を満足するモノポールがコイルを通過したときの理論値に一致するものであった[19]．さらに実験を精密化して実験を続けたがその後再びモノポールは見つかっていない．果たして，このバレンタイン・デイの空からの贈り物が本物かどうかわからないが*，この報告が世界中の理論家・実験家の双方に与えたショックの大きさははかり知れないものがある．

最後に，もしこのキャブレラ事象を信用せず，またこれから先もモノポールが本当に見つからないとすると，これはまた別の意味で大変なことである．この「見つからない」という意味は二通りに解釈できる．すなわち，A．現象論的にない，という立場．宇宙初期には山ほどできたのだが何らかのメカニズムでほとんど消えてしまって，あったとしても実質的に検出不能であるという場合である．これは上にもふれた新しい宇宙論に通じるが，これがなかなか微妙な理論で本当に「正しい宇宙論」なのか今のところわからない．一方，B．原理的にない，ということにするとこれまたやっかいである．ちょうどクォークの閉じ込め[20]と同じようにモノポール閉じ込めの理論をつくる必要がある．あるいはゲージ理論に何らかの修正を行ってモノポールが最初から出てこないようにする．もっとも簡単にはせっかくつくった大統一理論を否定すればよい．

---

* 本物かどうかわからないという意味はインチキということではない．機械的な振動や電気的ノイズ，磁気しゃへいの破れなど，種々の原因が考えられる．なお似たような事象として文献 11) の中の C.C. Tsuei 参照．

実際，びんからいったん出した魔物は容易なことでは再びびんにはもどらないのである*. 異端児モノポールは一体どこに安住の地を見いだすことになるのだろうか.

* グリム童話. なおこの文章は，かつて一般相対論における宇宙項に対して使われた (Ya. B. Zel'-dovich & I. D. Novikov : Relativistic Astrophysics I (MIT, 1975, p.29)

2章　ディラック・モノポール

2・1　マックスウェル方程式

最初に通常の電磁気学を復習しておこう．電荷密度を ρ，電流密度を $\boldsymbol{j}$ とすると，真空中のマックスウェル方程式はガウス単位で

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}=4\pi\rho \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}=0 \tag{2.3}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{2.4}$$

となる．式 (2.1) は電荷があるとそれを中心として四方に電場 $\boldsymbol{E}$ がわき出すことを示している．これに対応して式 (2.3) は磁場の源としての磁荷がないことを示している．磁場 $\boldsymbol{B}$ は式 (2.4) からわかるように，電流があるとそのまわりの回転として現れる．

式 (2.3) から

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{2.5}$$

となるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の存在がわかる．式 (2.5) を式 (2.2) に代入すると

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0. \tag{2.6}$$

したがって，$\boldsymbol{E}$ はスカラーポテンシャル ϕ を用いて

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2.7}$$

と表すことができる．式（2.5），（2.7）を式（2.1），（2.4）に代入してまとめると（$\Box\equiv\partial^2/c^2\partial t^2-\Delta$）

$$\Box\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=4\pi\rho \tag{2.8}$$

$$\Box\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \tag{2.9}$$

われわれの知りたいのは $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ であり，同じ $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を与えるならば $\boldsymbol{A}$, ϕ は何であってもかまわない．同じ $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を与える別のポテンシャルを $\boldsymbol{A}'$, ϕ' とおくと，式（2.5），（2.7）から

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A})=0 \tag{2.10}$$

$$\mathrm{grad}(\phi'-\phi)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A})=0 \tag{2.11}$$

となり，式（2.10）から，あるスカラー関数 χ を用いて

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}\,\chi \tag{2.12}$$

とおくことができる．これを式（2.11）に代入して

$$\phi'=\phi+\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}. \tag{2.13}$$

このようなポテンシャルの不定性が結果を変えないことを**ゲージ不変性**と呼び，式（2.12），（2.13）を**ゲージ変換**と呼ぶ．したがって，χ を適当に選んで新しい $\boldsymbol{A}$, ϕ に対して

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{2.14}$$

となるようにすることができる．式（2.14）を式（2.8），（2.9）に代入すると，ϕ, $\boldsymbol{A}$ に対する方程式は結局

$$\Box\phi=4\pi\rho \tag{2.15}$$

$$\Box\boldsymbol{A}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{2.16}$$

となる．条件（2.14）の下に式（2.15），（2.16）を解いて ϕ, $\boldsymbol{A}$ を求め，これを式（2.5），（2.7）に代入すると $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ が求まる．すべて相対論的に共変な形に書くと $A^\mu=(\phi,\boldsymbol{A})$, $J^\mu=(c\rho,\boldsymbol{J})$,（$\mu=0,1,2,3$）とおいて，式（2.15），

(2. 16) と式 (2. 14) は*

$$\Box A^{\mu}=\frac{4\pi}{c}J^{\mu} \tag{2.17}$$

$$\partial_{\mu}A^{\mu}=0 \tag{2.18}$$

またゲージ交換 (2. 12), (2. 13) は

$$A_{\mu}\to A_{\mu}+\partial_{\mu}\chi \tag{2.19}$$

となる.

式 (2. 17) を見ると A^{μ} が光速 c の波動方程式を満足し，電磁波を記述することがわかる. A^{μ} を量子化すると光子 (photon) が出てくる. 以上をまとめて

(i) 電磁場を量子化して光子を出すにはベクトルポテンシャル A^{μ} を導入する**.

(ii) ベクトルポテンシャルにはゲージ変換の不定性，式 (2. 19) がある.

2·2 モノポールの導入

さて，上の定式化にモノポールを導入しよう. 原点にモノポールがあるとする. 電荷に対応して磁荷 g を導入すると

$$\boldsymbol{B}=\frac{g}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}},\quad \hat{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}/r. \tag{2.20}$$

式 (2. 3) はしたがって

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=4\pi g\delta(\boldsymbol{r}) \tag{2.21}$$

と書き換えられる. すると式 (2. 5) のように $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ としてベクトルポテンシャルを導入できないのである ($\mathrm{div\,rot}\,\boldsymbol{A}\equiv 0$). むりやり $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ とおいて $\boldsymbol{A}$ を導入し，かつ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}\neq 0$ となるためには $\boldsymbol{A}$ がどこかに特異点をもたなくてはならない.

モノポールがあるとき $\boldsymbol{A}$ が特異点をもたねばならないことはただちにわか

* $x^{\mu}=(x^0,x^1,x^2,x^3)$, $x_{\mu}=(x^0,-x^1,-x^2,-x^3)$, $\partial_{\mu}=\partial/\partial x^{\mu}$, $A_{\mu}=(\phi,-\boldsymbol{A})$.

** 相対論的場の量子論をつくるにはどうしても ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ でなく) A^{μ} が必要なことは § 2·5 でふれる.

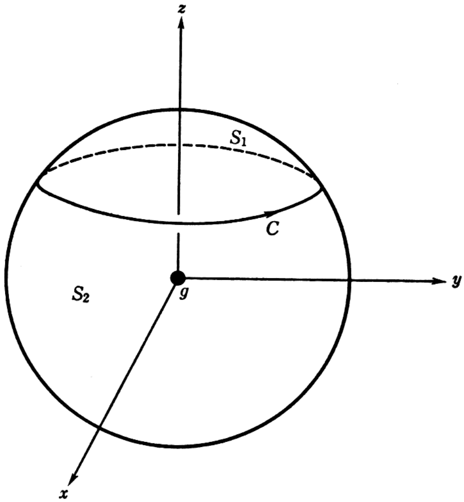


図 2.1　原点に強さ g のモノポールがある場合の磁束の計算

る[21]. 原点を中心とする半径 r の球面を考える（図 2.1）. 球面上の等緯円 C を考える. 球面は C によって上下二つの曲面 S_1, S_2 に分かれるが, もしどこにも特異点がないとすると, S_1 に対して

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{S_1} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{S_1} B_n\,\mathrm{d}S \tag{2.22}$$

$$= \begin{pmatrix}\text{面 } S_1 \text{ を通って外向きに} \\ \text{出ていく磁束}\end{pmatrix}$$

一方, S_2 に対しては同じ C を逆向きにたどって

$$\oint_{-C} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{S_2} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{S_2} B_n\,\mathrm{d}S \tag{2.23}$$

$$= \begin{pmatrix}\text{面 } S_2 \text{ を通って外向きに} \\ \text{出ていく磁束}\end{pmatrix}$$

となる. 式（2.22）と式（2.23）の和をとると左辺はゼロ, 右辺は球面から外向きに出ていく全磁束で $4\pi g$ に等しく, これは明らかに矛盾である. したがって $\boldsymbol{A}$ は球面上のどこかに特異点をもたなくてはならない. 球の半径 r は任

意であったから $\boldsymbol{A}$ は原点から任意の距離で少なくとも一つ特異点をもたなければならない．結局，$\boldsymbol{A}$ の特異点は原点から無限遠まである曲線に沿ってならんでいるように選べる．これをディラックのひも（string）と呼ぶ．

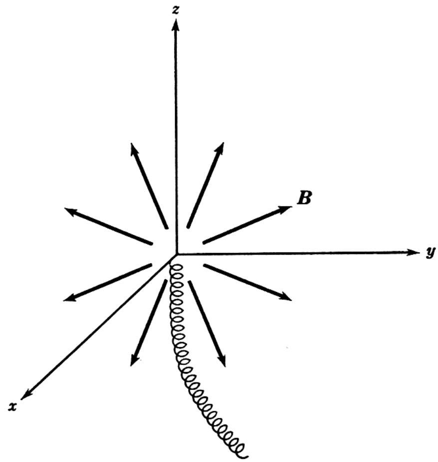
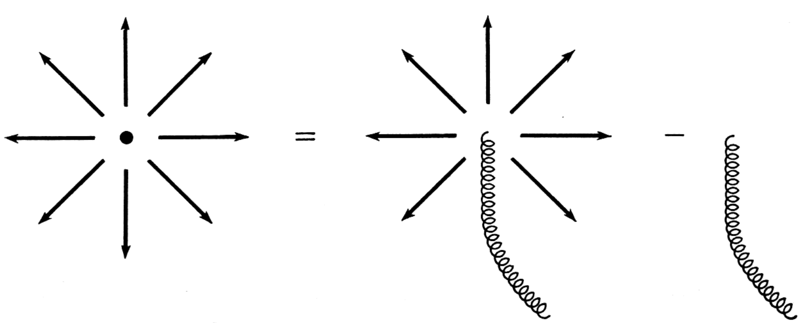


図 2.2　原点から無限遠点までのびたソレノイドのつくる磁場

ディラックのひもをもっとわかりやすく理解するには次のような考え方をするとよい．原点から無限遠までのびるソレノイドを考える（図 2.2）．ソレノイドは十分細く（例えばその直径が 1 フェルミ以下）古典力学的には観測できないとする．このソレノイドに適当な電流を流すと原点から磁束 $4\pi g$ が四方にひろがる．ソレノイドのつくる磁場はもちろん特異性のない普通のベクトルポテンシャルを用いて表すことができる．モノポールとソレノイドの違いはソレノイドの中の磁場（無限遠から $4\pi g$ の磁束が入りこむ）だけである．したがってモノポールとは（ソレノイドのつくる磁場）−（ソレノイドの中の磁場）と見なせる．この無限遠までのびたソレノイドがディラックのひもである（図 2.3）．式で表すと


図 2.3　モノポールをソレノイドで表す（式 (2.24)）

$$\boldsymbol{B}_{\text{mono.}}=\text{rot}\,\boldsymbol{A}_{\text{solen.}}-\boldsymbol{B}'_{\text{in solen.}} \tag{2.24}$$

となる．問題はこのひもが観測量（observable）でないこと，すなわち

（i）　どのようなひもの配置に対しても同じ物理を与える

（ii）　あるひもの配置に対してひもの中の磁場（上の $\boldsymbol{B}'$）が結果に影響を与えない

の二つが成り立たなければならない．ここではまず（i）を考える．（ii）については §2·5 で論ずる．

さて，このような理論の中に含まれる不定性が結果に影響を与えないようなものがあるだろうか．それが上に述べたゲージ不変性である．すなわち

“ひもの選び方とゲージ変換の自由度が 1：1 に対応している”

ようになっていなければならない．具体的にこれを見ていこう[22]．

式（2.20）の磁場 $\boldsymbol{B}$ を出すようなベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ として

$$\text{(i)}\quad A_x=\frac{-gy}{r(r+z)},\quad A_y=\frac{gx}{r(r+z)},\quad A_z=0 \tag{2.25}$$

をとる．このとき $\boldsymbol{A}$ の特異点（ひも）は z 軸の負の部分にある［図 2.4 (a)］．あるいは同じ $\boldsymbol{B}$ を出す $\boldsymbol{A}$ として

$$\text{(ii)}\quad A_x=\frac{gy}{r(r-z)},\quad A_y=\frac{-gx}{r(r-z)},\quad A_z=0 \tag{2.26}$$

ととることもできる．このとき $\boldsymbol{A}$ の特異点（ひも）は z 軸の正の部分になる

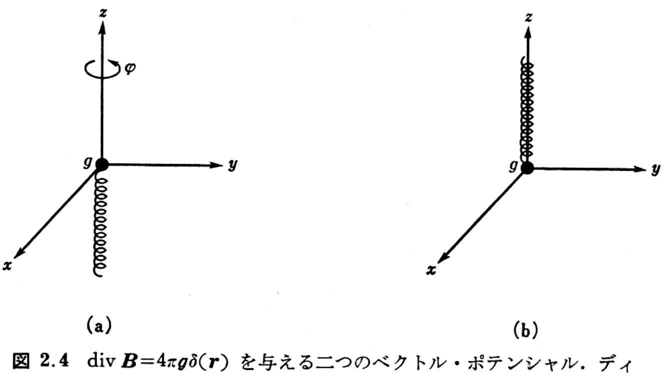


図 2.4　div $\boldsymbol{B}=4\pi g\delta(\boldsymbol{r})$ を与える二つのベクトル・ポテンシャル．ディラックのひもをソレノイドで表す

[図 2.4 (b)]. $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ をとると (i) と (ii) がともに式 (2.20) の $\boldsymbol{B}$ をつくり出すことは直接計算によってたしかめることができる.

(i) と (ii) の差をとってみると

$$\Delta A_x=\frac{2gy}{x^2+y^2},\quad \Delta A_y=\frac{-2gx}{x^2+y^2},\quad \Delta A_z=0 \tag{2.27}$$

となり, (i) と (ii) はゲージ変換

$$\boldsymbol{A}_{(\mathrm{ii})}=\boldsymbol{A}_{(\mathrm{i})}-\mathrm{grad}\,\chi,\quad \chi=2g\tan^{-1}\frac{y}{x}=2g\varphi \tag{2.28}$$

によって結ばれており, ひもの選び方がゲージ関数 χ の選び方に帰着できた. ここで φ は z 軸のまわりの回転角である. 特にひものまわりをぐるっと一周すると χ は $4\pi g$ 変化する.

$$\Delta\chi=4\pi g \tag{2.29}$$

2・3　ゲージ不変性

一般に理論がある対称性をもつと保存則が出てくる. 作用積分がある変分に対して不変であればそれに対応して保存カレントが出てくるが, その時間成分の空間積分が時間によらない定数になる. これをネーター (Noether) の定理という[23]. 例えば, 時空の平行移動に対して作用が不変となるようにつくっておくとエネルギー・運動量の保存則が出る. また空間回転に対して不変であれば角運動量保存則が出る. このように保存則を要求することは対称性を要求することに帰着する. 対称性を物理学の基本原理として出発するのが現代の素粒子論の一つの手法である.

対称性の一つとして作用積分が波動関数の位相変化

$$\begin{aligned}\psi(x)&\to e^{-i\alpha}\psi(x)\\ \psi^*(x)&\to\psi^*(x)e^{i\alpha}\end{aligned}\qquad (\alpha\ \text{は定数}) \tag{2.30}$$

に対して不変であるとすると電荷の保存則が出る[23]. それにはラグランジアン $\mathscr{L}(\psi,\partial_\mu\psi)$ に ψ^* と ψ が常に積の形で入っていればよい.

ここで α を定数としたが, この α がもし時空の関数とするとどうなるか. つまり時空の各点で位相を任意に与えても作用が不変であることを要求するとど

うなるだろうか．この変換

$$\psi(x)\to e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \qquad (2.31)$$
$$\psi^*(x)\to\psi^*(x)e^{i\alpha(x)}$$

を**第二種のゲージ変換**，あるいは**局所ゲージ変換**と呼ぶ．このとき ψ の微分は

$$\partial_\mu\psi\to e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu-i\partial_\mu\alpha)\psi \qquad (2.32)$$

となって新しく $\partial_\mu\alpha$ の項が現れるため作用は不変とならない．そこでベクトル場 A_μ を導入し，微分の代わりに共変微分

$$D_\mu=\partial_\mu+iA_\mu \qquad (2.33)$$

を定義し，ゲージ変換（2.31）の下で A_μ が

$$A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\alpha \qquad (2.34)$$

のように変換することを要求すると，共変微分は

$$D_\mu\psi\to e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu-i\partial_\mu\alpha+iA_\mu+i\partial_\mu\alpha)\psi=e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi \qquad (2.35)$$

となって $\partial_\mu\alpha$ の項が打ち消し合う．したがって，ラグランジアン $\mathscr{L}(\psi,\partial_\mu\psi)$ が式（2.30）に対して不変となるようにつくってあれば，$\mathscr{L}(\psi,D_\mu\psi)$ は局所ゲージ変換（2.31）の下で不変である．すなわち

"作用積分が局所ゲージ変換に対して不変であることを要求するとベクトル場が自然に導入され，かつベクトル場と初めに入れた物質場との相互作用が一意的に決まる．"

2·4　ディラックの量子化条件

上の一般論を電磁場に応用しよう．荷電粒子の電荷を e として式（2.31）の $\alpha(x)$ を

$$\alpha(x)=e/\hbar c\cdot\chi(x) \qquad (2.35)$$

とおく．波動関数が

$$\psi(x)\to e^{-ie/\hbar c\cdot\chi(x)}\psi(x) \qquad (2.36)$$

と変化したとき作用積分が不変となるためには，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x)$ を導入して（簡単のため $A^0\equiv\phi=0$ とする）

$$\boldsymbol{A}(x)\to\boldsymbol{A}(x)-\nabla\chi(x) \qquad (2.37)$$

を仮定し，微分 $\nabla\psi$ を

$$\nabla\psi\rightarrow\left(\nabla-\frac{ie}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\psi \tag{2.38}$$

で置き換えればよい．例えば，量子力学でハミルトニアンHが

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(x)=\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla)^2+V(x) \tag{2.39}$$

で与えられるとき，上の手法から新しいハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H&=\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+V(x) \\ &=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+V(x) \end{aligned} \tag{2.40}$$

となる．

式 (2.40) はよく知られた電磁場と相互作用する荷電粒子のハミルトニアンになっている．繰り返すと，局所ゲージ変換 (2.36) に対して理論が不変であることを要求するとベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が導入されて，その相互作用の形が式 (2.40) のように決まり，$\boldsymbol{A}$ の変換則は式 (2.37) で与えられる．

これをモノポールに応用する．式 (2.28) を用いると，式 (2.36) は

$$\psi(x)\rightarrow e^{-i(2eg/\hbar c)\varphi}\psi(x). \tag{2.41}$$

波動関数が一価であるためには z 軸のまわりをぐるっと一周してもとの点にもどってきたとき，波動関数ももとの値にならなければならない．式 (2.41) から

$$2eg/\hbar c\cdot 2\pi=2n\pi$$

あるいは

$$eg/\hbar c=n/2 \qquad (n\text{ は整数}) \tag{2.42}$$

これがディラックの量子化条件である．

2·5 アハロノフ－ボーム効果

古典論の範囲では，われわれの知りたいのは $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ であり，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ はこれらを導くために便宜的に導入したものであるといっても別

にあやまりではない．また前節で述べた位相の一価性も古典論的には無意味であろう．しかし量子論に移ると話は全く変わってくる．方程式を相対論的に共変な形にしてはじめて満足のいく（因果律を正しく反映した）量子化ができるが，このとき正準変数は場の強さ $F_{\mu\nu}$ ではなく A_μ である．すなわち A_μ を量子化して光子を出す．さらには，量子論では観測量は $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ では不十分で，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$（のある積分）もまた観測量となることを示すことができる．これはアハロノフ－ボーム効果として知られている[24]．

§ 2·2 で導入したソレノイドはどんな手段を用いても本当に観測できないのだろうか．十分細いと仮定したから古典論的には見えない．もし量子論的にも観測不能ならばモノポールは“見えないソレノイドのつくる磁場”と見なせる．

ここで，次のような量子力学の教科書に出てくる干渉実験をしよう（図 2.5)．ただし窓の右側に，紙面に垂直にソレノイドを置いておく．電流を流すとソレノイドの内側には磁場ができるが，外側には場は一切はみださないものとする（実際，十分よい近似でそうなるようにできる)．左側から電子ビームをあてて右側のスクリーン上でソレノイドの上側からきた波 ψ_1 と下側からきた波 ψ_2 の干渉を調べることにしよう．ソレノイドの外側には場がないので干渉じまはソレノイドに電流を流しても変化がないように一見思える．ところが実際には明らかな変化が現れるのである．これは実験によって実際にたしかめられてい

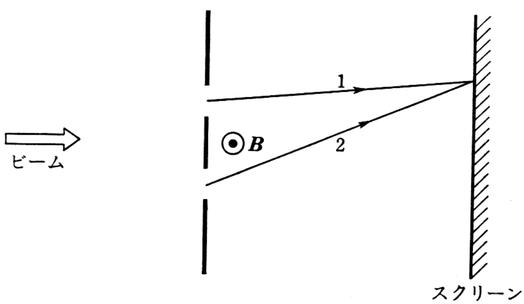


図 2.5　アハロノフ-ボーム効果
窓の右側の細いソレノイドの中に磁場 $\boldsymbol{B}$ が紙面に垂直に（裏から表へ）かかっている

る[25)]．これは波動関数の位相が直接ベクトル・ポテンシャルによって決まるためである．具体的にこれを示そう[26)]．

自由粒子のシューレーデンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=E\psi \qquad (2.43)$$

の解は

$$\psi(\boldsymbol{r})=e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\quad k=\sqrt{2mE}/\hbar \qquad (2.44)$$

であるが，一方，電磁場のある場合

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla-\frac{ie}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi=E\psi \qquad (2.45)$$

の解は

$$\psi(\boldsymbol{r})=\exp\left\{i\boldsymbol{kr}+\frac{ie}{\hbar c}\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right\} \qquad (2.46)$$

である．ここで積分は粒子の道筋に沿って行う．すなわち波動関数に，$\boldsymbol{A}$ に依存する余分な位相がつけ加わる．したがって，ソレノイドに電流を流さないときのスクリーン上の強度を

$$|\psi_1+\psi_2|^2 \qquad (2.47)$$

とすると，電流を流したときは

$$|\psi_1+e^{i\Phi}\psi_2|^2 \qquad (2.48)$$

となる．ここで Φ は式（2.46）から

$$\Phi=\frac{e}{\hbar c}\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (2.49)$$

で与えられる．積分はソレノイドのまわりを一周するようにとる．これがアハロノフ－ボーム効果である．

ソレノイドが観測できない条件（つまり，式（2.47）と式（2.48）が同じ結果を与える条件）は

$$\frac{e}{\hbar c}\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{e}{\hbar c}\cdot4\pi g=2\pi n \qquad (n\ は整数) \qquad (2.50)$$

すなわち

$$eg/\hbar c=n/2 \qquad (2.51)$$

これはまさにディラックの量子化条件である．このとき § 2·2 で述べたソレノイドは古典論的にも量子論的にも観測不能となり，ひもは見えず，純粋のモノポールになる[7]．

2·6　電磁場の角運動量

強さ g のモノポールが原点にあるとしよう．荷電粒子（電荷 $+e$）がその近くを通過すると，荷電粒子にはモノポールのつくる磁場によってローレンツ力が働く．これは中心力ではないので粒子の角運動量の変化がおこる．これを調べよう[27]．

z 軸の正方向に粒子が衝突径数 b，速さ v で飛んできたとする（図 2.6）．時刻 $t=0$ に粒子が $(b,0,0)$ を通過するとして，時刻 t に粒子に働く力は y 方向に

$$F_y=\frac{e}{c}vB_x=\frac{eg}{c}\frac{vb}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}} \tag{2.52}$$

運動量移動は全体で

$$\varDelta p_y=\int_{-\infty}^{\infty}F_y\,\mathrm{d}t=2eg/cb. \tag{2.53}$$

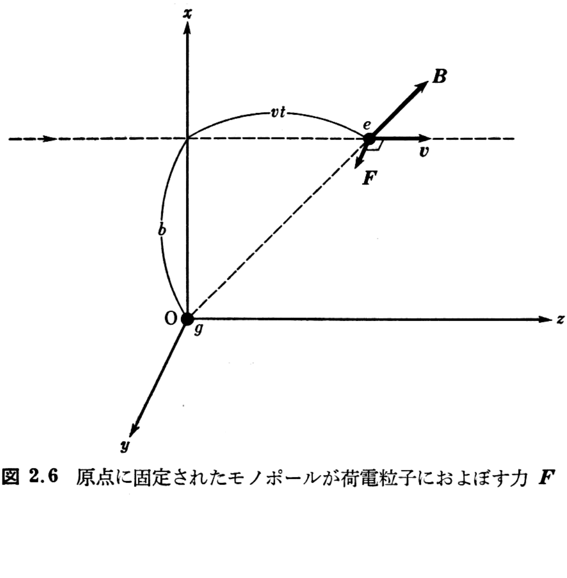


図 2.6　原点に固定されたモノポールが荷電粒子におよぼす力 $\boldsymbol{F}$

したがって，角運動量の変化は

$$\Delta L_z = b\Delta p_y = 2eg/c \tag{2.54}$$

で与えられる．粒子の進行方向の角運動量が変化することに注意しよう．

この角運動量変化は電磁場の角運動量変化によって補われるはずである．電磁場の運動量密度はポインティング・ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{p}^{em} = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \tag{2.55}$$

で与えられるから電磁場の角運動量は

$$\boldsymbol{L}^{em} = \frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}^3x \tag{2.56}$$

である．これに式（2.20）を入れると

$$[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})]_i = \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,x^j E^l B^m = \frac{g}{r}\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,\hat{x}^j\hat{x}^m E^l$$

$$= \frac{g}{r}(\delta_{il} - \hat{x}^i\hat{x}^l)E^l \qquad (\hat{x}^i = x^i/r).$$

したがって

$$\begin{aligned} L_i^{em} &= \frac{1}{4\pi c}\int \mathrm{d}^3x E_l(\delta_{il} - \hat{x}^i\hat{x}^l)\frac{g}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi c}\int \mathrm{d}^3x E_l \frac{\partial}{\partial x^l}(g\hat{x}^i) = -\frac{1}{4\pi c}\int \mathrm{d}^3x(\mathrm{div}\boldsymbol{E})g\hat{x}^i \\ &= -\frac{eg}{c}\hat{x}^i \end{aligned} \tag{2.57}$$

が得られる．荷電粒子が z 軸の左方から右方へ通過するとき $\boldsymbol{L}^{em}$ の変化は

$$\Delta L_z^{em} = -\frac{2eg}{c} \tag{2.58}$$

となって，たしかに式（2.54）の寄与と打ち消し合う．

逆にモノポール・荷電粒子系の全角運動量を

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}} - \frac{eg}{c}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.59}$$

（$\hat{\boldsymbol{r}}$ はモノポールから荷電粒子に向かう単位ベクトル）

とおくと

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}} - \frac{eg}{c}\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} \\
&= \boldsymbol{r}\times\left(\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) - \frac{eg}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \\
&= \boldsymbol{r}\times\frac{e}{c}\left(\dot{\boldsymbol{r}}\times g\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) - \frac{eg}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \\
&= \frac{eg}{c}\left\{\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{r^3}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\right\} \\
&= 0 \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

となって全角運動量の保存則が成り立つ．すなわち

“モノポールと荷電粒子の系には軌道角運動量のほかに電磁場の角運動量

$$-(eg/c)\hat{\boldsymbol{r}}$$

が現れる．ここで $\hat{\boldsymbol{r}}$ はモノポールから荷電粒子に向かう単位ベクトルである．”

量子論では，角運動量は量子化されて $\hbar/2$ の整数倍となるから

$$eg/c = \hbar/2\cdot n \qquad (2.61)$$

あるいは

$$eg/\hbar c = n/2 \qquad (n \text{ は整数}) \qquad (2.62)$$

となり，再びディラックの量子化条件が得られた．

ここで注意すべきことは，角運動量を $\hbar$ でなく $\hbar/2$ の整数倍としたことである．これまでの話にはフェルミ粒子はどこにも登場しなかったし，スピンも導入していない．それにもかかわらず式（2.61）はこれで正しいのである．すなわち，$eg/\hbar c$ が整数の場合はモノポール・荷電粒子系はボーズ統計に従い，半整数の場合はフェルミ統計に従う．証明はここでは述べないが[28]，要は粒子系の波動関数の位相が粒子の交換に対して $2\pi ieg$ のように振舞うからである．このいわばボーズ粒子からフェルミ粒子をつくるメカニズムがモノポール特有の種々の結果を生むことになる．

2・7　量子化条件のもたらすもの

モノポールが一つ存在したとしてその強さを g としよう．式（2.62）からすべての荷電粒子の電荷は

$$e=(\hbar c/2g)n \qquad (n\ は整数) \tag{2.63}$$

の形に書ける．すなわち

"モノポールの存在を仮定すると電荷の量子化が得られる．"

もう少し詳しくこれを見ていこう[5]．モノポールが一つ存在するとしてその強さを g_j とする．すべての荷電粒子の電荷は

$$e_i=(\hbar c/2g_j)n_{ij} \quad (n_{ij}\ は整数) \tag{2.64}$$

と書ける．$\{n_{ij}\}$ の最大公約数を n_{0j} とすると $n_{ij}=n_i n_{0j}$（n_i は整数）とおいて

$$e_i=n_i e_0,\quad e_0=n_{0j}\hbar c/2g_j \tag{2.65}$$

となり，すべての荷電粒子は e_0 を最小単位としてその整数倍のものしか許されない．ここで n_{0j} は $\{n_{ij}\}$ の線形結合で表せるから e_0 は $\{e_i\}$ の組み合わせで表すことができ，e_0 は物理的に実現可能な状態の電荷である．e_i と g_j の役割を逆転させて全く同様の議論を行うと，すべてのモノポールの強さは最小単位 g_0 の整数倍であり，g_0 は物理的に実現可能な磁荷で

$$g_0 e_0/\hbar c=n_0/2 \tag{2.66}$$

である．

なお，ここで e_0 は実際に荷電粒子として外に出てくる粒子の電荷であって，理論に含まれる最小電荷，例えば電子電荷を e としてクォーク電荷 $e/3$，ではない．クォークの場合はグルーオンの雲がとりまいており，電荷には通常の電荷のほかに色電荷（color charge）も含まれる．単純に式（2.66）で $e_0=e/3$ とおいて $g_0=3(\hbar c/2e)n_0$ と考えてはいけない．

もっとも電荷の量子化はモノポールの存在を仮定しなくても出てくる．例えば，電子や陽子（を構成するクォーク）を一つ大きな群に入れてしまういわゆる大統一理論をつくればよい．ところがまさにこの場合に，理論の中から必然的にモノポールが出てくるのである（3章参照）．

次に，モノポールどうしの相互作用の強さを考えてみよう．クーロンの法則で e を g で置き換えると，同じ距離はなれた点で二つのモノポール間に働く力は荷電粒子の場合に比べて，式（2.62）から

$$g^2/e^2=(\hbar c/e^2)^2\cdot n^2/4\simeq 4700n^2 \tag{2.67}$$

となり，これはものすごく大きい．したがって単純に考えると，モノポールは反モノポールと強く結合して分離するのがむずかしく，またたとえ対生成を行ってもただちに対消滅を行って一つ一つ単独に取り出すことができないように思われる．これもたしかにモノポールを実際に見つけることがむずかしい原因の一つであろう．しかし，結合定数が大きいということは摂動計算が無意味であることを表しており，また場の理論の立場から見ると相互作用の強さを決めるのは g^2 ではなくモノポール質量 M を用いて g^2/M^2 であるから，M が十分大きければ（3章参照）話はそう単純ではなくなる．

これまではモノポールをひもつきで定義してきたが，ひもなしの理論をつくることもできる．それには数学のファイバー・バンドル理論のセクション(section）という概念を用いる．この方法をおし進めていくと種々のゲージ理論をすべて統一的に幾何学の言葉を使って表すことができて，一般相対論も含めた数学的に美しい物理学の幾何学化ができるが，ここでは述べない[29),30)]．

また § 2·6 で述べた，モノポールがある場合の新しい角運動量を用いると，波動関係の部分波展開には通常の球面調和関数の代わりにモノポール調和関数が定義できて[31)]，これを用いてモノポールの散乱束縛問題を論じることができる[32)]．

上に述べたように，結合定数が大きく摂動計算ができないために，場の理論を形式的につくってファインマン図を計算することは無意味に思われるかもしれないが，一つのダイアグラムの計算にも種々のアカデミックな問題点があってそれ自体面白い．また，適当な収束和をとって散乱問題を扱うことも考えられている．このあたりの問題については文献 4）に詳しい．

古典論ができるとそれを量子化したくなるが，これについてもいろいろ問題点が出てくる．ハミルトニアン形式では文献 33)，ラグランジアン形式では 34)，格子ゲージ理論では 35)，全般的には 7)，36）の各文献を見られたい．最終的にはくりこみまで行かねばならないが，いずれにしてもまだ満足のいくモノポールの場の理論はできていない．

ここでの量子化とは，モノポールを最初から「素粒子」として場の理論に組

み込むときの問題点である．実はモノポールは（後に述べるように），ソリトン解として自然に出てくるものだという立場に立つと話は少し変わってくる．この場合はソリトンの量子化という問題になってくる[37]．

いずれにしても，まだ未開の分野で夢多き将来が待っているといえるであろう．モノポールはまだぴんから出たばかりなのである．

3章　ゲージ・モノポール

3·1　ソリトン

この節では2次元の系（空間1次元＋時間1次元）を考える．このとき，スカラー場 $\phi(x,t)$ に対してラグランジアンは，ポテンシャルを $U(\phi)$ として

$$\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2}\dot{\phi}^2-\frac{1}{2}\phi'^2-U(\phi) \tag{3.1}$$

と書ける．ここで $\dot{\phi}=\partial\phi/\partial t$, $\phi'=\partial\phi/\partial x$ である．なお $U(\phi)\geqq 0$ であるが，$U(\phi)$ の最小値がゼロとなるようにエネルギーの原点をとっておく．式 (3.1) から全エネルギーは

$$E[\phi]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}\phi'^2+U(\phi)\right] \tag{3.2}$$

また，運動方程式は

$$\Box^{(2)}\phi\equiv\ddot{\phi}-\phi''=-\frac{\partial U}{\partial\phi} \tag{3.3}$$

と，波動方程式の形になる．

一般に波動方程式の解は，自由波（$U(\phi)\equiv 0$）の場合をのぞいて時間の経過とともにその形がくずれていき，空間全体にひろがってやがては消えていく（池に石を投げ込んだとき水面にひろがる波を思い浮かべるとよい）．しかし，$U(\phi)$ がある特別な形をしている場合には静的で局所的な解をもつ場合がある．波がある点の近傍だけに現れ，時間がたってもその形がくずれないのである．これを**ソリトン解**と呼ぶ．なお，静的な解が見つかれば定常的な解もただちに求まる．式 (3.3) はローレンツ不変な形をしているので $\phi_1(x)$ がソリトン解であれば $\phi_1(x-vt)$ もまた解であり，後者は波の形をそのまま保って速

度 v で進むソリトンを表す（ここでは $v=1$ の単位系をとっている）.

例として次のような $U(\phi)$ をとってみよう.

$$U(\phi)=\frac{1}{4}\lambda(\phi^2-m^2/\lambda)^2 \tag{3.4}$$

ここで λ, m^2 は正の定数である．運動方程式（3.3）は（静的な解を求めているから時間微分項を落として）

$$\phi''=\lambda\phi^3-m^2\phi \tag{3.5}$$

となるがこれはただちに解けて，自明な解 $\phi=0$ のほかに $\phi=\pm\phi_s$

$$\phi_s=(m/\sqrt{\lambda})\tanh\frac{m}{\sqrt{2}}x \tag{3.6}$$

が得られる.

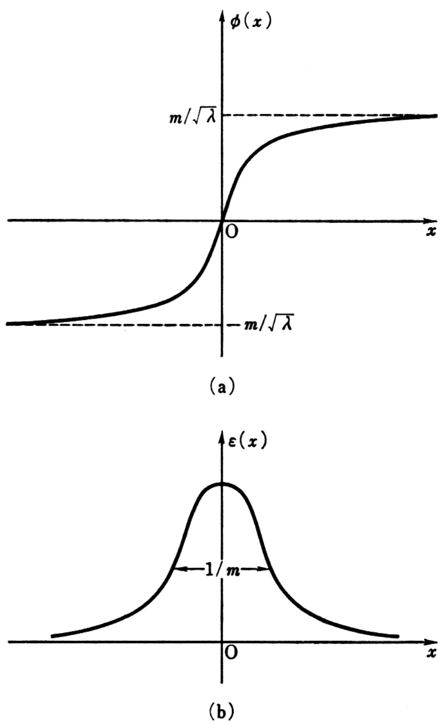


図 3.1　ソリトン解とそのエネルギー密度

エネルギー密度は式（3.2）から

$$\varepsilon(x)=\frac{1}{2}\phi_s'^2+U(\phi_s)$$

$$=(m^4/2\lambda)\mathrm{sech}^4 mx/\sqrt{2} \tag{3.7}$$

式（3.6），（3.7）を図 3.1 に示す．図を見るとたしかに“原点になにかエネルギーのかたまり——真空からのずれ——がある”ことが直観的に理解できるであろう．なおここで原点 $x=0$ ということに特別の意味はない．もともと方程式（3.5）は平行移動に対して不変になっている．

問題は次のことである．どのような場合にこのようなソリトン解が現れるのか．すなわち $U(\phi)$ はどんな形をしている必要があるか．最初にもどって，式（3.2），（3.3）を静的な場合について書き直すと

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2+U(\phi)\right\} \tag{3.8}$$

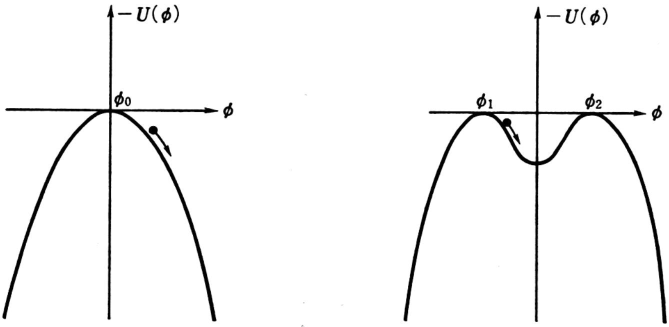
$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=+\frac{\partial U}{\partial\phi} \tag{3.9}$$

となる．ここで x を時間，ϕ を座標と読みかえると，式（3.8）はポテンシャル $-U(\phi)$（マイナスに注意！）の下で運動する質点に対する作用を，式（3.9）はこの作用を極小にするという条件から導かれる質点の運動方程式であると見なすことができる．

有限な E を得るためには，式（3.8）より

$$\phi'\to 0,\ U(\phi)\to 0 \qquad (x\to\pm\infty) \tag{3.10}$$

でなければならない．もし $U(\phi)=0$ の解が唯一 $\phi=\phi_0$ であれば［図 3.2(a)］，式（3.8），（3.9）は自明な解 $\phi\equiv\phi_0$ しかもちえない．いったん $\phi\neq\phi_0$ となれば，ただポテンシャルの坂道をころげ落ちるだけで決して ϕ_0 にもどることはない．もし $x=-\infty$ で $\phi=\phi_0$ ならば，あらゆる x に対して $\phi=\phi_0$ でなければ $x=+\infty$ で $\phi=\phi_0$ にもどれないのである．一方，もし $U(\phi)=0$ の解がいくつかあれば［図 3.2(b)］話は変わる．$x=-\infty$ で $\phi=\phi_1$ から出発して $x=+\infty$ で $\phi=\phi_2$ に到達する（あるいはその逆）が可能になる．すなわち波動方程式（3.3）がソリトン解をもつためにはポテンシャル $U(\phi)$ の最小



(a)　　　　　　　　(b)

(a)　$U(\phi)$ の最小値を与えるφが唯一のとき　　(b)　$U(\phi)$ の最小値を与えるφが二つあるとき

図 3.2　ポテンシャル $-U(\phi)$ の下での質点の運動

値を与える ϕ は唯一には決まらないことが必要である．これを**真空の縮退**と呼ぶ．

式 (3.4) にあげた例では，$U(\phi)=0$ の解は $\phi=+m/\sqrt{\lambda}$ と $-m/\sqrt{\lambda}$ の二つであり，解 (3.6) は $x=\pm\infty$ でこの二つの真空を結ぶ解になっている．この場合

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x,t)\equiv\phi(\infty,t)$$

は時間 t の関数で t について連続であるが，一方，任意の t に対して $\phi(\infty,t)$ は $+m/\sqrt{\lambda}$ か $-m/\sqrt{\lambda}$ の離散的な値をとる．したがって，ある時刻 t_0 に $\phi(\infty,t_0)=+m/\sqrt{\lambda}$ であれば任意の時刻 t でも $\phi(\infty,t)=+m/\sqrt{\lambda}$ でなければならない．$x=-\infty$ についても同様である．解は $x=-\infty$ と $+\infty$ における ϕ の値によって分類できて，これらが有限のエネルギーでまざり合うことはない．有限エネルギーで移り変われないことは図 3.1 (a) からもわかる．この図は $\phi_s=\{\phi(-\infty)=-m/\sqrt{\lambda},\ \phi(+\infty)=+m/\sqrt{\lambda}\}$ を表しているが，これを $\phi_-=\{\phi(-\infty)=-m/\sqrt{\lambda},\ \phi(+\infty)=-m/\sqrt{\lambda}\}$ に移すには，原点から右側のすべての点について ϕ の値を $+m/\sqrt{\lambda}$ から $-m/\sqrt{\lambda}$ に動かさねばならないからである．ソリトン解 ϕ_s はこの意味で安定であり，時間とともにく

ずれて消滅してしまうことはない．

数学的にこれを表すと，保存カレント

$$J^{\mu}=(\sqrt{\lambda}/2m)\varepsilon^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi,\quad \mu,\nu=0,1,\quad \varepsilon^{01}=-\varepsilon^{10}=1 \tag{3.11}$$

を用いて（$\partial_{\mu}J^{\mu}=0$ は自明である）保存量 n をつくると

$$n=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xJ^{0}=(\sqrt{\lambda}/2m)\{\phi(x=+\infty)-\phi(x=-\infty)\} \tag{3.12}$$

が解の分類を与える．図 3.1 の場合 $n=1$ である． $n=0$ ならば自明な解 $\phi\equiv m/\sqrt{\lambda}$（または $-m/\sqrt{\lambda}$）に対応する． n を位相的（topological）量子数と呼ぶ．式（3.11），（3.12）は § 2・3 のはじめに述べた理論の対称性から出てくる保存量とは全く関係ない* 理論の位相的構造（より正確には無限遠における境界条件のトポロジー．ここであげた例では $\{x\}=\{-\infty,+\infty\}$ から $\{\phi_{\infty}\}=\{-m/\sqrt{\lambda},+m/\sqrt{\lambda}\}$ への写像のクラス分け）に対応する量である．

静的な解に対する全エネルギーを計算しておこう．式（3.7）より

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\varepsilon(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{m^{3}}{\lambda}\equiv M. \tag{3.13}$$

この右辺を M と書いたのは，式（3.13）が式（3.2）の一般の E から $\dot{\phi}$ の寄与をのぞいた残り，すなわち「質量」と見なせるからである． M をソリトンの質量と呼ぶことにする．M が結合定数 λ の逆数に比例することに注目しよう．これはソリトン解が自由場の解から摂動論的手法で得られることはないという上のトポロジー的な考察を別の面から支持している．ソリトン解は本質的に非摂動解なのである．

なお，場の理論的な言葉を使うと式（3.4）はスカラー場 ϕ の ϕ^4 結合（結合定数 λ）と質量項（“質量” が $-m^2$）を表している．$\mu^2\equiv-m^2>0$ のときは $U(\phi)=0$ の解は $\phi=0$ しかなく（もちろん $m^4/4\lambda$ をひいて原点をずらしておく），自明な解しかもちえない．物性論の相転移の言葉を用いるとその意味で $-m^2$ は温度 $T-T_c$ に対応し，位相的量子数 $\phi(\infty)-\phi(-\infty)$ がオーダー・パラメータになっている．このような $U(\phi)$ を**ヒッグス・ポテンシャル**

* 空間 1 次元のときは Thirring モデルによってネーター・カレントと結びつけることができる．高次元の場合は 文献 37) 参照．

と呼び，ϕ をヒッグス場と呼ぶ．

以上をまとめると*

（i） 無限遠におけるポテンシャル $U(\phi)$ の位相的構造が自明（trivial）でないときソリトン解が出る．ソリトン解が存在するためには真空に縮退がなければならない．

（ii） このとき解は互いに有限エネルギーで移り変われないクラスに分類される．クラスを特徴づけるような位相的量子数を定義することができる．

（iii） ソリトン解は非摂動解である．相互作用のない場合の解から摂動展開によって出してくることはできない．

最後に，ソリトンは上に述べたように単に抽象的数学的なものではなく，水の波などで実際に実現可能である．スコット[38)]の論文のはじめにその実に豪快な例が与えられている．

3·2　第二種超伝導体

超伝導状態とは物質の温度をその臨界温度 T_c より下げたとき，物質中の電子が二つずつ対になって（クーパー対）ボーズ粒子のように振舞い，この対のコヒーレントな集合が巨視的に示す振舞いをいう．このクーパー対の集合を複素スカラー場 ϕ で代表させよう．ϕ の期待値がゼロでなければ超伝導状態であり，これがオーダー・パラメータになる．

系の自由エネルギーを ϕ で展開し，電磁場の項を考慮するとラグランジアンは

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+D^{\mu}\phi^{*}D_{\mu}\phi-U(\phi) \tag{3.14}$$

となる．ここで

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu} \tag{3.15}$$

$$D_{\mu}=\partial_{\mu}-2ie/\hbar cA_{\mu} \tag{3.16}$$

---

* この章を通じて，簡単な例から得られた結果をもとに一般的な結論をまとめとして述べることにする．

であり（クーパー対の電荷は $-2e$ である），また $U(\phi)$ は $|\phi|$ の2次と4次の係数をパラメータ m^2 と λ で表して

$$U(\phi)=\frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi-m^2/\lambda)^2 \tag{3.17}$$

と書ける（$|\phi|^2$ はクーパー対の数に対応し，$|\phi|^2$ についての展開を $|\phi|^4$ の項までとった．場の理論の立場からいえば4乗まででとめておくことはくりこみ可能性から要求される）．式（3.14）をギンツブルク－ランダウ（Ginzburg-Landau）のラグランジアンと呼ぶ．

式（3.17）が前節のヒッグス・ポテンシャルと同じ形をしていることに注意しよう[39]．したがって，このあとは前節とほとんど同じ道すじをたどることができる．“質量” $-m^2$ は温度 $T-T_c$ の役割を果たしている．$m^2<0$ であればエネルギーを最小にする ϕ は $\phi=0$ しかなく，これは常伝導状態（normal）である．一方，$m^2>0$ であれば最低エネルギー状態——真空——に対応する ϕ はゼロでなく，超伝導状態（super）が実現される．この場合の真空の縮退は $U(\phi)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$ より

$$\phi(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}(m/\sqrt{\lambda})e^{i\alpha(x)} \tag{3.18}$$

一方，$D_\mu\phi\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$ より

$$A_\mu(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}(\hbar c/2e)\partial_\mu\alpha \quad (\text{純ゲージ}) \tag{3.19}$$

となる．式(3.18)を満足する ϕ の集合 $\{\phi_\infty\}$ は前節のように離散的ではなく，連続となる．$\{e^{i\alpha}\}$ は群の言葉を用いると U(1)，幾何学的に考えると単位円 S^1 に同相である．

さて，式（3.14）において，特に外場としての磁場が一方向について一定，例えば z によらない（$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\ (x,y)$）としよう．さらに $A_z=0$ となるようにゲージを選ぶ．すると式（3.14）は（空間2次元＋時間1次元）の問題に帰着する．この場合，無限遠点は xy 平面上どの方向へ向かうかによって決まるから $|x|\to\infty$ の集合を2次元の単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}_{(2)}$ で表すことができる．これは明らかに単位円 S^1 に同相である．

$$\{x||x|=\infty\}=\{\hat{\boldsymbol{r}}_{(2)}\}=S^1=\{e^{i\beta}\} \tag{3.20}$$

結局，式（3.18）の条件は座標空間から無限遠点でのヒッグス場への写像 $S^1\to S^1$ に等しい．

円周から円周への写像のクラス分け，つまり互いに連続変形によっては移り変われないような写像の分類は数学でいうホモトピー群になり，一方の円を一周するとき写像によって移った他方の円を何周するかという巻き数（winding number）がまさにその分類を与える（ホモトピーの言葉を使うと $\Pi_1(S^1)=Z$．一般に S^n を n 次元球面として $\Pi_n(S^m)$ は写像 $S^n\to S^m$ のクラス分け（ホモトピー群），Z は整数加群を表す[40]）．したがって位相的量子数はこの場合，式（3.18）と式（3.20）より

$$n=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\beta}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta} \tag{3.21}$$

で与えられる．

物理的にはこの n が何にあたるかを見よう．第二種超伝導体では臨界温度以下で外部磁場をだんだん強くしていくとマイスナー効果が一部破れて物質内に磁場が入り込み，今考えている平面上では磁場の入り込んだ点を超伝導体がとりかこむ形になる．この磁場のフラックスをとりかこむ曲線を周とする面について磁束 $\boldsymbol{\Phi}$ を計算すると

$$\boldsymbol{\Phi}=\int\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{\hbar c}{2e}\Delta\alpha \tag{3.22}$$

線積分は超伝導体（＝真空）の部分で行うから場はゼロで，最後の等式で式（3.19）を用いた．一方，式（3.18）において $\phi(x)$ が1価関数であるためには，この磁束のまわりをぐるっと一周してきたとき（$\beta:0\to2\pi$）$\phi(x)$ ももとの値にもどらなければならない．したがって

$$\Delta\alpha=2\pi n\qquad(n\ \text{は整数}) \tag{3.23}$$

式（3.23）の n は式（3.21）の巻き数 n と全く同じものである．

式（3.22）と式（3.23）から

$$\boldsymbol{\Phi}=\frac{\hbar c}{2e}\cdot2\pi n=n\boldsymbol{\Phi}_0\qquad(\boldsymbol{\Phi}_0=hc/2e) \tag{3.24}$$

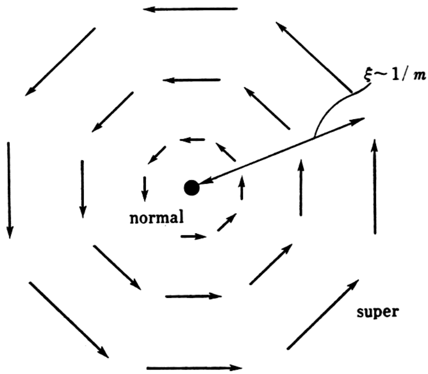


図 3.3　渦　糸
オーダー・パラメータ $\phi=\langle\phi\rangle e^{i\alpha}$ を矢印で表す．ξ はコヒーレンスの長さで，$r>\xi$ では超伝導状態である

したがって，磁束は Φ_0 を最小単位としてその整数倍のものしか許されない．n は（$H_{c1}<H<H_{c2}$ のときに）超伝導体内に入り込んだ磁力線の数である．$n>1$ の場合，磁力線の間に斥力が働くので結局，単位磁束 Φ_0 の磁力線が物質中に格子状に並ぶことになる．これを渦糸（vortex）と呼ぶ．式（3.18）からわかるように，一つの渦糸のまわりにオーダー・パラメータ ϕ がうずのようにとりかこむのである（図 3.3）[18]．うずの大きさを $|\phi|$ の変化から決めるとこれがコヒーレンスの長さ ξ であり，$\xi\sim 1/m$ である．

このような渦構造は実際に超伝導体に実現される（例えばキッテルの教科書[41]に載っている写真を見よ）．空間2次元のソリトンは現実のものであることを強調しておく．

3·3　ビリアル定理

この節では（空間 D 次元＋時間1次元）を考える．スカラー場 ϕ に対するラグランジアンはポテンシャルを $U(\phi)$ として

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi-U(\phi)\qquad(\mu=0,1,\ldots,D)\qquad(3.25)$$

となり，エネルギーは

$$E[\phi]=\int d^D x\left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+U(\phi)\right]$$
$$\equiv V_1[\phi]+V_2[\phi] \tag{3.26}$$

で与えられる．V_1，V_2 はそれぞれ右辺の二つの積分を表している．

ここで，スケール変換 $x\to\lambda x$

$$\phi_\lambda(x)=\phi(\lambda x) \tag{3.27}$$

を行うと，式（3.26）から簡単な変数変換で

$$E[\phi_\lambda]=\lambda^{2-D}V_1[\phi]+\lambda^{-D}V_2[\phi] \tag{3.28}$$

が得られる．式（3.8），（3.9）とその下で述べたように静的な解は式（3.26）を極小にする．特に λ の変化に対しても $\lambda=1$ のとき，式（3.28）は極小とならなければならない．λ で微分して $\lambda=1$ とおくと

$$(2-D)V_1-DV_2=0 \tag{3.29}$$

V_1, V_2 は $\phi=\phi$（ソリトン解）に対する値を意味する．なお V_1，V_2 は式（3.26）からわかるように負にはならないことに注意しよう．式（3.29）はビリアル定理である．

式（3.29）をみると，$D\geqq 2$ では自明な解 $\phi\equiv 0$ 以外に解はないことがただちにわかる．$D=1$ の場合は $V_1=V_2$ となればよく，解は存在しうる．§3·1 にあげたソリトンがそれである．スカラー場のみで静的なソリトン解を得るには空間1次元の場合に限る．これをデリックの定理という[42]．

それでは，$D\geqq 2$ のときはどのように一般化すれば静的なソリトン解が得られるのだろうか．すぐに予想できることはゲージ場 A_μ を導入すればよい．もちろんそれにともなって微分 ∂_μ を共変微分 D_μ に変えておく．ゲージ場からの寄与を上にならって V_3 と書くと，式（3.29）は書き直されて（$A_\lambda{}^\mu(x)=\lambda A^\mu(\lambda x)$ を用いる）

$$(2-D)V_1-DV_2+(4-D)V_3=0 \tag{3.30}$$

となる．

$D=2$ に対しては $V_2=V_3$ となればよく，解が存在しうる．その例が §3·2 に与えた渦糸解である．§3·2 では最初，（3+1）次元から出発しながら何と

なく空間2次元にしてしまったように見えるがそのようにしてはじめて円－円対応の自明でないクラス分けができる．空間を3次元にしておくと $\{x||\boldsymbol{x}|=\infty\}$ は球面 S^2 になり，$S^2\to S^1$ の写像はつねに0写像に連続変形できる．数学的には $\Pi_2(S^1)=0$ である．

$D=3$ の場合，式 (3.29) から $V_1+3V_2=V_3$ となるようにゲージ場を導入する．すぐ上に注意したように $U(\phi)=0$ の解の集合 $\{\phi_\infty\}$ がちょうど2次元球面に対応するようになっていなければならない ($\Pi_2(S^2)\neq 0$. コールマンのたとえ[6] をひくと，オレンジの皮をむかずに中味を食べることはできない)．そのためにはスカラー場 $\boldsymbol{\phi}$ に内部空間をもたせればよい (例えばアイソベクトル $\boldsymbol{\phi}$ にする)．するとそれと結合するゲージ場の方も電磁場 A^μ のように単純な1成分では足りず，必然的に内部自由度をもったゲージ場 $A_a{}^\mu$ に拡張しなければならない (これを**非アーベル**ゲージ場と呼ぶ)．

ゲージ場を導入することによる利点がもう一つある．それは $V_1[\phi]<\infty$ の条件が $\partial_\mu\phi\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$ でなく，$D_\mu\phi\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$ となることである．$V_1<\infty$ のためには $D=3$ の場合

$$D_\mu\phi\xrightarrow[r\to\infty]{}O(r^{-2})\qquad(r=|\boldsymbol{x}|)\tag{3.31}$$

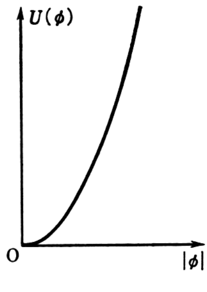
でなければならないが，$\partial_\mu\phi\to O(r^{-1})$，$A_\mu\to O(r^{-1})$ で，この二つがうまく組み合わされて式 (3.31) を満足する可能性が出てくる．ポテンシャル A_μ が遠方で $O(r^{-1})$ だから場の強さは $O(r^{-2})$ であり，遠距離相互作用に対応するソリトン解が可能となる．これが § 3·5 に述べるゲージ・モノポールである．

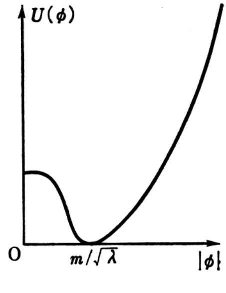
さらに $D=4$ とすると式 (3.30) は $V_1=V_2=0$，すなわち純ゲージ場の場合のソリトン解の存在を示唆する．これをインスタントンと呼ぶ[43]．$D\geqq 5$ では，式 (3.30) を満足する自明でない解は存在しないことはただちにわかる．

3·4　ヒッグス機構

再び (3+1) 次元にもどろう．ゲージ・モノポールを考える前に少し準備が必要である．

はじめに複素スカラー場を考えよう．





(a)　$m^2<0$　　　(b)　$m^2>0$

図 3.4　ヒッグス・ポテンシャル

$$\mathscr{L}=\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi-U(\phi,\phi^*),$$
$$U(\phi,\phi^*)=\frac{\lambda}{2}\left(\phi^*\phi-\frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \qquad (3.32)$$

このラグランジアンは大域的 (global) なゲージ変換 $\phi\to\phi e^{i\alpha}$（α は定数）の下で不変である．これを U(1) の対称性をもつという．

もし $m^2<0$ ならば $\mu^2=-m^2$ はスカラー場の質量を表しており，$\phi=0$ は真空を与える［図 3.4 (a)]*，一方，$m^2>0$ になると $\phi=0$ はもはやエネルギーの極小値を与えず，$|\phi|^2=m^2/\lambda$ を満足する ϕ が新しい真空を与えることになる［図 3.4 (b)]．$|\phi|=m/\sqrt{\lambda}$ と選んでも，まだ ϕ の位相は決まらず，真空は図 3.5 のたて軸のまわりの回転方向に縮退している．ゲージを選んで ϕ の位相 $\alpha=0$ とおき，真空を $\phi=m/\sqrt{\lambda}\equiv\eta/\sqrt{2}$（実数）に選ぶ（これを ϕ が真空期待値 $\langle\phi\rangle=\eta/\sqrt{2}$ をもつという）．

真空からのずれを実スカラー場 ϕ_1，ϕ_2 で表し

$$\phi(x)=\{\eta+\phi_1(x)+i\phi_2(x)\}/\sqrt{2} \qquad (3.33)$$

とおいて，これをもとの式 (3.32) に代入すると

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2-\frac{\lambda}{8}(\phi_1{}^2+2\eta\phi_1+\phi_2{}^2)^2 \qquad (3.34)$$

---

* $m^4/2\lambda$ をひいてエネルギーの原点がゼロとなるようにしておく．

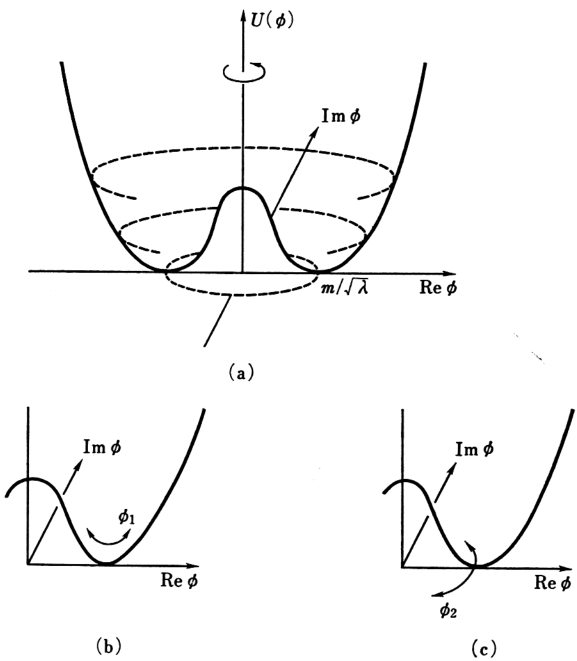


図 3.5　ヒッグス・ポテンシャルと真空からの励起 (b) は質量をもった，(c) は質量ゼロの励起を示す

となる．式(3.34) は質量 $\sqrt{\lambda}\ \eta$ のスカラー場 ϕ_1 と質量ゼロのスカラー場 ϕ_2 を含んでいる．ϕ_1，ϕ_2 はそれぞれ図 3.5 の (b) と (c) に示した方向の真空からの励起を表している．式 (3.34) はもはやはじめにもっていた対称性をもたない（対称性が明白に見えずかくされているといった方が正しいが)．これを**自発的対称性の破れ** (spontaneous breakdown) と呼ぶ．連続な対称性が自発的に破れると ϕ_2 のような質量ゼロのスカラー場が現れる．これをゴールドストーンの定理と呼び，ϕ_2 をゴールドストーン・ボゾン場と呼ぶ．

さて，はじめの対称性を局所ゲージ不変性にすると，どうなるか．§ 2・3 で述べたように，ゲージ場 A_μ が導入されてラグランジアンは $D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$ を用いて（e は結合定数）

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+D^\mu\phi^*D_\mu\phi-U(\phi,\phi^*) \qquad (3.35)$$

となる．$U(\phi,\phi^*)$ は式 (3.32) と同じものを用いる．したがって真空は前と同じ構造になり，式 (3.33) を式 (3.35) に代入して

$$B_\mu = A_\mu + \frac{1}{e\eta}\,\partial_\mu \phi_2 \tag{3.36}$$

とおいてまとめると ($\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ をあらためて $F_{\mu\nu}$ とおく)

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{16\pi}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,e^2\eta^2 B^\mu B_\mu + \frac{1}{2}\,\partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 - \frac{1}{2}\,(\lambda\eta^2){\phi_1}^2 \tag{3.37}$$

が得られる．式 (3.37) は質量 $M_V = e\eta$ のベクトル場 B_μ と質量 $\sqrt{\lambda}\ \eta$ のスカラー場 ϕ_1 を含んでおり，ゴールドストーン場 ϕ_2 は完全に消去される．最初，質量ゼロのベクトル場（自由度2）と複素スカラー場（自由度2）から出発して，自発的対称性の破れの結果，質量をもったベクトル場（自由度3）と質量をもった実スカラー場（自由度1）が得られ，ゴールドストーン場は出てこない．これをヒッグス機構 (Higgs Mechanism) と呼び，後に見るようにゲージ理論において重要な役割を果たす．

以上をまとめておこう．

（i） ヒッグス場 ϕ を導入し，ヒッグス・ポテンシャル $U(\phi)$ の形を適当にとって真空期待値 $\langle\phi\rangle \equiv \eta$ がゼロでないようにすることによって対称性が自発的に破れるようにすることができる．

（ii） このときゲージ場の方は自然に質量 M_V をもつようになり，ゲージ結合定数を e として $M_V = \eta e$ となる．

3·5　ト・ホーフト－ポルヤコフのモノポール

さてようやく準備がととのった．いよいよ (3+1) 次元におけるソリトン解としてのゲージ・モノポールについて調べよう．§ 3·3 の $D=3$ のところで注意したように，(i) スカラー場に内部自由度をもたせる，(ii) それにともなってゲージ場の方も内部自由度をもたせる，の二点を考慮してモデルをつくる．もっとも簡単な例として次のような SO(3) モデルをとろう[44]．

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{16\pi}\,{G_a}^{\mu\nu}G_{a\mu\nu} + \frac{1}{2}\,D^\mu\phi_a D_\mu\phi_a - U(\phi_a) \tag{3.38}$$

ここで ϕ_a はアイソベクトル ϕ の成分 $(a=1,2,3)$，$G_a{}^{\mu\nu}$ は電磁ポテンシャル A^μ の一般化 $A_a{}^\mu$ に対応する場の強さで，式 (3.15) の $F^{\mu\nu}$ の一般化になっている．

$$G_a{}^{\mu\nu}=\partial^\mu A_a{}^\nu-\partial^\nu A_a{}^\mu-e\,\epsilon_{abc}\,A_b{}^\mu A_c{}^\nu \qquad (3.39)$$

（μ,ν は時空，a,b,c は内部空間の添字を表す）

共変微分は

$$(D^\mu\phi)_a=\partial^\mu\phi_a+ie\,\epsilon_{abc}\,A_b{}^\mu\phi_c \qquad (3.40)$$

ここで e はゲージ結合定数である（電磁場の場合の電荷 e の一般化，$\hbar=c=1$ の単位系を用いている）．また $U(\phi_a)$ は

$$U(\phi_a)=\frac{1}{4}\lambda(\phi_a\phi_a-\eta^2)^2 \qquad (3.41)$$

によって定義する．$G_a{}^{\mu\nu}$，ϕ_a，$D^\mu\phi_a$ はすべて内部空間の 3 次元回転に対してベクトルの変換性を示すから，式 (3.38) のラグランジアンは SO(3) 不変になっている．

式 (3.38) から導かれるエネルギーは静的解に対して（$A_a{}^0=0$ と選んで）

$$E=\int d^3x\left\{\frac{1}{16\pi}G_a{}^{ij}G_{aij}+\frac{1}{2}D^i\phi_a\,D_i\phi_a+U(\phi_a)\right\} \qquad (3.42)$$

$$(i=1,2,3)$$

である．全エネルギーが有限となるためには無限遠で

$$(D^i\phi)_a=0 \qquad (3.43)$$

$$(r\to\infty)$$

$$U(\phi)=\frac{1}{4}\lambda(\phi^2-\eta^2)^2=0 \qquad (3.44)$$

となる必要がある．もちろん，$G_a{}^{ij}\to 0$ でなければならないが，§ 3·3 でも注意したように，遠方で自明でない解 $A_a{}^i\sim O(r^{-1})$，$G_a{}^{ij}\sim O(r^{-2})$ をもち，かつ式 (3.43)，(3.44) を満足する（これをヒッグス真空と呼ぶ）場合を探そう．

その前に位相構造をチェックしておく．式 (3.44) から

$$\phi(\boldsymbol{r})\xrightarrow[r\to\infty]{}\eta\boldsymbol{r}^a \qquad (\hat{\boldsymbol{r}}^a \text{ は内部空間での単位ベクトル}) \qquad (3.45)$$

であるから無限遠点（これは実空間でどの方向へ行くかによって決まるから実

空間の単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}$ によって決まる）での写像は $\hat{\boldsymbol{r}}\to\hat{\boldsymbol{r}}^a$，すなわち $S^2\to S^2$ であり，§ 3·3 で述べたように，この写像は“巻き数” n によって互いに移り変われないようなクラスに分類できる．位相的量子数 n はこの場合

$$n=\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}S^i \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{abc}\,\hat{\phi}_a\,\partial_j\,\hat{\phi}_b\,\partial_k\,\hat{\phi}_c \quad (\hat{\phi}_a=\phi_a/|\phi|) \tag{3.46}$$

で与えられる[45]．

たしかにソリトン解が存在するという保証が得られたので，今度は具体的にこれを求めよう．

$$\phi_a=\eta\,\delta_{ai}\,\hat{r}^i F(r) \tag{3.47}$$

$$A_a{}^i=\frac{1}{ier}\,\varepsilon_{aij}\,\hat{r}^j\,[1-K(r)] \tag{3.48}$$

とおいて

$$F(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}1,\quad K(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}0 \tag{3.49}$$

を要求する．このようにおくと，式 (3.43)，(3.44) をたしかに満足することは容易に確かめられる．十分遠方では

$$G_a{}^{ij}\sim\frac{1}{er^2}\,\epsilon_{ijk}\,\hat{r}^a\,\hat{r}^k \tag{3.50}$$

したがって，電磁場 $F^{\mu\nu}$ を

$$F^{\mu\nu}=\hat{\phi}_a\cdot G_a{}^{\mu\nu} \tag{3.51}$$

によって定義すると（電磁場との対応は以下にふれる）

$$F^{ij}\sim\frac{1}{er^2}\,\epsilon_{ijk}\,\hat{r}^k \tag{3.52}$$

すなわち，磁場 $\boldsymbol{B}$ に対して十分遠方で

$$B^i=-\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{r^2}\,\hat{r}^i \tag{3.53}$$

となり

$$g=-\frac{1}{e} \tag{3.54}$$

の強さの磁荷をもったモノポールに対応する磁場が得られた．

対称性の破れについて調べよう．最初にもっていた SO(3) の対称性は真空

を $\phi_a{}^2=\eta^2$ にずらしたために破れるが，真空を一つ選んでもまだ ϕ 軸のまわりの回転の対称性 (SO(2)$\simeq$U(1)) が残っている．対称性は SO(3)→U(1) に自発的に破れたことになる．その結果，前節に述べたヒッグス機構がはたらきスカラー粒子は質量 $\mu=\eta\sqrt{2\lambda}$ をもち，荷電ベクトル粒子は質量 $M_V=\eta e$ をもつようになる．残った U(1) 対称性に対応するベクトル粒子は質量がゼロで中性である．これは光子（photon）と見なせる．

SO(3) の共変微分

$$\partial^\mu+ieA_a{}^\mu T_a \qquad (T_a \text{ は3次元回転の生成元（generator）}\quad (T_a)^{ij}=-\epsilon_{aij}) \tag{3.55}$$

を電磁場の共変微分

$$\partial^\mu+iQA^\mu \tag{3.56}$$

に対応させるには

$$A^\mu=\hat{\phi}_a\cdot A_a{}^\mu \tag{3.57}$$

として電荷演算子 Q を

$$Q=e\hat{\phi}_a T_a \tag{3.58}$$

によって定義すればよい．無限遠でヒッグス真空への射影を，遠距離力を示す場＝電磁場と見なすわけである．

電荷は Q の固有値 q で与えられる．したがって“アイソスピン” T_a の固有値（今の場合，整数値）に応じて q は量子化される．荷電ベクトル粒子の電荷 q は $\pm e$ となるから，式 (3.54) はディラック条件 $qg=1$ を与える．

一般にフェルミ粒子も含むような場合に，上の理論を拡張すると T_a の固有値は半整数の値をとり，$q=e\times n/2$ となる．$q_0=e/2$ は最小電荷である．式 (3.54) を代入すると $qg=n/2$, $q_0g=1/2$ となり，式 (3.54) の g は $n=1$ のモノポールになっている．

モノポールの質量を調べよう．式 (3.47), (3.48) を運動方程式に代入すると F と K に対する方程式が得られる．一方，式 (3.42) に代入するとエネルギー E を F と K の積分で表すことができる．結果は

$$E=M=\frac{\eta}{e}\times f(\lambda/e^2). \tag{3.59}$$

ここで $f(\lambda/e^2)$ は無次元の量で，値は数値積分によって求まり，1のオーダーになる．ここでは述べないが，特に $\lambda\to 0$ の極限では F と K は厳密に解けて[46] $f(0)=1$ である．モノポールの質量 M は $M_V=\eta e$ を用いて

$$M\sim\eta/e=\eta e/e^2=M_V/e^2 \tag{3.60}$$

となり，理論に現れるベクトル粒子の質量の $1/e^2$ 倍の程度になる．特に電磁相互作用の場合は微細構造定数 $\alpha=e^2/\hbar c\sim 1/137$ を用いて

$$M\sim\frac{1}{\alpha}M_V\sim 137M_V \tag{3.61}$$

である．

$M\sim\frac{1}{\alpha}M_V$ となる証明をあと二つ述べておく．

一つはゲージ場の距離に対する振舞いから得られる[7]．ヒッグス機構によって質量 M_V のベクトル粒子が出てくるが，そのコンプトン波長 $1/M_V$ の外側では長距離力の電磁場しか残らない．したがって，磁場のエネルギーは

$$E\gtrsim\frac{1}{8\pi}\int_{1/M_V}^{\infty}\mathrm{d}^3xB^2\simeq\frac{1}{2}g^2\int_{1/M_V}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{g^2}{2}M_V\sim\frac{1}{e^2}M_V$$

となる．

もう一つは，式 (3.42) を変形して“平方完成”を行って不等式を出し，E の下限を求める方法で原論文[47]を見られたい．

F と K の振舞いを図 3.6 に示す．モノポールの大きさは $1/M$ 程度，ヒッグス真空はモノポールの中心から距離 $1/\mu$ の外側にひろがっている．

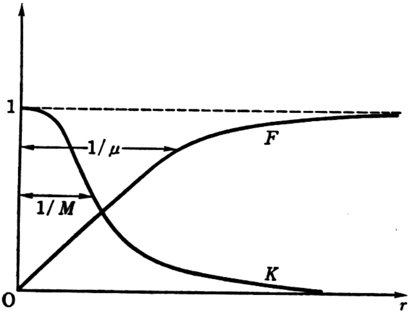


図 3.6　ヒッグス場 (3.47) とベクトル・ポテンシャル (3.48) の振舞い．$r>1/\mu$ でヒッグス真空になる

一般にゲージ対称性 G が自発的に破れて対称性 H になったとしよう（上の例では $G=\mathrm{SO(3)}\to H=\mathrm{U(1)}$）．このとき剰余群 G/H が $U(\phi)=0$ の解の集合 $\{\phi_\infty\}$ を与える．一方，実空間の無限遠点の集合は何度も述べたように S^2 で表されるから，S^2 から $\{\phi_\infty\}$ への写像が互いに有限エネルギーで移

り変われないようなクラスに分類される場合にソリトン解が出てくる．特にGが半単純 (semi-simple)，すなわち U(1) を因子として含まず，一方HがU(1) を因子とする場合，この U(1) を電磁ポテンシャルのゲージに対応させれば，このソリトン解はモノポールと見なせる．

数学的には $\Pi_2(G/H)\neq 0$ が必要条件である．ところが数学の定理によれば

$$\Pi_2(G/H)\simeq\Pi_1(H)$$

である．特に $H=\mathrm{U}(1)$ とすると $\mathrm{U}(1)\simeq S^1$ だから，$\Pi_1(\mathrm{U}(1))$ は円 - 円対応 $S^1\to S^1$ に等しく，これは巻き数によってクラス分けされる．

以上をまとめて

（i） 半単純の群Gが自発的対称性の破れによって群Hにこわれ，このとき電磁ポテンシャルのゲージ U(1) が H の因子として含まれるならば（電荷の演算子Qが対称性 H の生成元であれば）モノポールがソリトン解として出てくる．

(ii) このときモノポールの質量 M はヒッグス機構によって出てきたベクトル粒子の質量 M_V の $1/e^2$ 倍になる．ここで e はゲージ結合定数である．

(iii) ゲージ・モノポールは2章に述べたディラック・モノポールのように手で入れたものではなく，上の (i) の条件を満足していれば理論の中から自然に，必然的に出てくる．その質量も理論から決まってくる．ゲージ・モノポールはそのコンプトン波長から決まるある大きさをもっており（すなわち内部構造をもち)，ひもはどこにも現れない．

(iv) 位相的量子数は保存量である．すなわちモノポールは安定で崩壊して他のものになったりすることはない．

3·6 大統一理論とモノポール

最後に現象論との関連性について述べる*．まず

“素粒子論はゲージ理論によって記述される”

* この節は概説のみで終わる．大統一理論と SU(5) については文献 48)，一般にリー群の応用については 49)，SU(5) モノポールについては 50)，51) の各文献を見られたい．

ことを仮定する．なぜか．ちょうど電磁相互作用が光子を媒介粒子として記述されるように，弱い相互作用もベクトル粒子を媒介粒子として記述したい．低エネルギーで用いられる 4-フェルミ相互作用はもともとくりこみ不能であり，高エネルギーになると種々の振幅が発散してしまう．その意味で 4-フェルミ相互作用は重い媒介粒子（中間ボゾン）の質量に比べて運動量が無視できるような低エネルギーにおける近似であると見なすのである．ところが，このベクトル粒子を最初からある質量をもったベクトル粒子としてラグランジアンに入れておくと，やはりくりこみ不能になるのである．これを是正するには次のようにすればよい．まずある大きな局所ゲージ不変性を仮定する．これから自然にベクトル場が導入され，さらに相互作用の形まで決まってしまう（電磁場における最小相互作用（§ 2·3，2·4）を思い出してほしい）．ここまででではまだ質量は出てこない．そこでヒッグス機構を用いてはじめの対称性が自発的に破れるようにする．ベクトル粒子は質量をもつようになるが，このようにして質量をもたせるとくりこみ可能性が破れずにすむのである．弱い相互作用と電磁相互作用の両方を含むような対称性 SU(2)×U(1) から出発してヒッグス機構によってベクトル粒子に質量をもたせて（このベクトル粒子を $W^{\pm}$，Z と呼ぶ），最後に電磁相互作用の対称性 U(1)——光子 γ——だけが残るようにしたものがワインバーグ-サラム理論である．この $W^{\pm}$ もZも実験的に見つかっている．

以上をまとめると，ゲージ理論では

（i）ベクトル粒子が自然に導入され，相互作用の形が一意的に決まってくる．

（ii）くりこみ可能な理論をつくることができる．

ヒッグス・ポテンシャルの形は原理的にはどこからも決まらない．これを適当に仮定し，現象論と一致するようにそのパラメータを決めていく．したがって正直にいえば，われわれの未知なことをすべてヒッグス・ポテンシャルに押し込めてしまったにすぎない，ともいえる．ヒッグス・ボゾンが実際に予想されるところに見つかれば話は別だが，いまだにどんなヒッグス・ボゾンも見つかっていない．

一方，強い相互作用に対しては三つの色をもったクォークが，グルーオンと

呼ばれるベクトル粒子を媒介として，相互作用をするモデルをとることができる．これを量子色力学（QCD）と呼び，ゲージ対称性は SU(3) である．

物質の基本粒子としての素粒子の数（つまり，これだけあれば物質を構成する要素として十分である，という数）は少なければ少ないほどよい．20 世紀のはじめには陽子と電子のみであった．その後，中性子，中性微子，μ 粒子，π 中間子，等々と増え続け，現在では300 以上にもなる．これでは「基本粒子」とはとてもいえない．そこでクォーク・モデルが登場した．ところが一つの族（family，例えば μ と e は別の族に属するという分類の仕方）に限って考えても，クォークについて u と d（それぞれ色が 3 つある），軽粒子について e と ν_e の計 8 つが基本粒子（反粒子を含めるとその倍），これに媒介粒子として γ，$W^{\pm}$，Z の 4 つとグルーオンが 8 つ，さらにヒッグス粒子が加わって，やはりこれでもいかにも多すぎる（族が 3 つあるのでさらに全体を 3 倍にする）．

ちょうど陽子と中性子を「核子」という一つのものに帰着させて，陽子，中性子というのは単に核子のアイソスピン空間における向きの違いにすぎないとしたように，上にあげた「基本粒子」も一つの大きな内部空間における向きの違いによって名前が変わるだけである，とできないものか．そこでは強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用の区別も全く消え去った統一的な議論ができるようになっているはずである．これが大統一理論である．もちろんこれは超高エネルギーで実現されていて，低エネルギーになると対称性が破れて各相互作用の特徴が現れてくるようになっている．

大統一理論の対称性は強い相互作用の SU(3) と弱･電磁相互作用の SU(2) ×U(1) を部分群として含むから，もっとも小さな（半単純の）群でも SU(5) になる．まず u，d，e，ν_e を統一的に扱うので，ちょうど陽子と中性子をアイソ・スピノールの核子にまとめたために陽子の電荷 $+e$，中性子の電荷ゼロと量子化されたように，電荷の量子化が可能になる（なぜ $Q_p = Q_{e^+}$ なのかの説明がつく）．また，同じ理由で u，d と e，ν_e を結ぶ相互作用が可能となって重粒子数が保存されなくなり，陽子の崩壊が可能になる．さらに $G = \mathrm{SU}(5)$，

$H=SU(3)_{color}\times U(1)$ とすると前節の終わりに述べた条件が満足されてモノポールが出てくる．この陽子崩壊とモノポールの検出が大統一理論の最も直接的な検証になる[15]．

大統一理論のモノポールの質量はどれくらいになるか．まず三つの相互作用が統一されるのは SU(5) の場合 10^{16} GeV 付近になる（結合“定数”はエネルギーの関数として変化するので，三つの結合定数が等しくなるエネルギーを考える）．これより高いエネルギーでは SU(5) 対称性が成り立つとすると，エネルギーが下がってきたとき，ヒッグス機構によってこの対称性が破られる．その結果ベクトル粒子（これを X，Y と名づける）は質量をもつようになるが，この X 粒子が陽子崩壊の媒介粒子になる．陽子崩壊の上限は実験から決まっているのでその質量も勝手に選べず，$M_X\sim10^{14}$ GeV である．したがってモノポールの質量は

$$M\sim\frac{1}{\alpha}M_X\sim10^{16}\,\mathrm{GeV}$$

となる（$E\sim10^{14}$ GeV で $\alpha_{\text{統一}}\sim1/50$ である）．

残されたことはただ一つ，この 10^{16} GeV のモノポールを見つけることである．1章でも述べたように実験家は野山を歩き空を飛び，地下深くもぐってモノポール探しにやっきとなり，理論家は宇宙の創世（10^{16} GeV のエネルギーはビック・バング以後 10^{-35} 秒に相当する）に思いをはせて星を見つめているのである．

果たして，自然はどのような解答をそのヴェールの下に隠しているのであろうか．

参考文献

1) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.*, **A133**, 60 (1931)

2) P. A. M. Dirac : in Ref., 10).

3) モノポールの文献はすこぶる多いが，世界中の文献をリストアップした文献集が発行されている.

1931—1975 D. M. Stevens : Virginia Tech. VPI-EPP-73-5

1973—1976 R. A. Carrigan, Jr. : Fermilab-77/42

1977—1980 R. E. Craven, W. P. Trower & R. A. Carrigan, Jr. : Fermilab-81/37

1981—1982 R. E. Carrigan & W. P. Trower : Fermilab-82/96

ちなみに 1981—1982 の文献集には 550 の論文が集められている.

モノポールのレヴューとしては

4) E. Amaldi & N. Cabibbo : Aspects of Quantum Theory, ed by A. Salam & E. Wigner (Cambridge Univ. Press, 1972)

5) P. Goddard & D. Olive : *Rep. Prog. Phys.*, **41**, 1357 (1978)

6) S. Coleman : 1975 Elice Lectures, in New Phenomena in Subnuclear Physics, ed by A. Zichichi (Plenum Press, 1977)

7) S. Coleman : The magnetic monopoles after 50 years later, 1981 International school of Subnuclear Physics, "Ettore Majorana" (HUTP-82/A032)

日本語では

8)「モノポール」, 月刊フィジクス特集号（海洋出版, 1983）

教科書では

9) R. Rajaraman : Solitons and Instantons (North-Holland, 1982)

がある. さらに最近の理論・実験の動向を知るには毎年開かれるモノポール国際会議の報告がよい.

10) 1981 Trieste Conf. "Monopoles in Quantum Field Theory", ed by N. S. Craigie, P. Goddard & W. Nahm (World Sci. 1982)

11) 1982 Wingspread Conf. "Magentic Monopoles", ed by R. A. Carrigan, Jr. & W. P. Trower (Plenum, 1983)

12) 1983 Michigan Conf.

13) 例えば 11) の中の Ahlen, 8) の中の林, 参照.

14) M. S. Turner, E. N. Parker & T. J. Bogdan : *Phys. Rev.*, **D26**, 1296 (1982)
15) 伊藤信夫：大統一場理論の検証，物理学最前線 **4**, 共立出版 (1983), 3 章. なお現在の実験のまとめとして 11) の中の Giacomelli, および 8) の中の梶野参照.
16) A. H. Guth : Xl Texas Symposium, MIT Preprint CTP 1050 (1983)
17) V. A. Rubakov : *Nucl. Phys.*, **B203**, 311 (1982), **B218**, 240 (1983)
C. G. Callan : *Phys, Rev.*, **D25**, 2141 (1982)
18) A. Jaffe & C. Taubes : Vortices and Monopoles (Birkhäuser, 1980)
19) B. Cabrera : *Phys. Rev. Letters*, **48**, 1378 (1982). さらに 11) の中の Cabrera 参照.
20) 宮沢弘成：クォーク閉じ込め，物理学最前線 1，共立出版 (1982)
21) C. N. Yang : The 1st B. W. Lee Memorial Lectures on Physics, 1980 Seoul, Korea. published by Korean Physical Society.
22) P. A. M. Dirac : in New Pathways in High Energy Physics I, ed by A. Perlmutter (Plenum, 1976)
23) 例えば N. N. Bogoliubov & D. V. Shirkov : Quantum Fields (Benjamin, 1983) を見よ.
24) Y. Aharonov & D. Bohm : *Phys. Rev.*, **115**, 485 (1959)
25) A. Tonomura et al. in "Gauge Theory and Gravitation", Proceedings, Nara, Japan 1982, *Lecture Notes in Physics*, **176**, p. 146 (Springer, 1983)
26) J. R. Ficenec & V. L. Teplitz, in "Electromagnetism : Paths to Research" (ed by D. Teplitz, Plenum, 1982) p. 297
27) J. D. Jackson : Classical Electrodynamics, 2nd ed. (J. Wiley, 1975)
28) A. Goldhaber : *Phys. Rev. Letters*, **36**, 1122 (1976). なお 7) の解説がわかりやすい.
29) C. N. Yang, Lectures in "6th Hawaii Topical Conference in Particle physics 1975" ed by P. N. Dobson (Univ. of Hawaii, 1976)
30) Y. Choquet-Bruhat & C. DeWitt-Morette : Analysis, Manifolds and Physics (North-Holland, 1982)
31) T. T. Wu & C. N. Yang : *Nucl. Phys.*, **B107**, 365 (1976)
32) Y. Kazama, C. N. Yang & A. S. Goldhaber : *Phys. Rev.*, **D15**, 2287 (1977)
33) T. S. Tu, T. T. Wu & C. N. Yang : *Scientia Sinica*, **21**, 317 (1978)
34) W. Deans : *Nucl. Phys.*, **B197**, 307 (1982)
35) G. Calucci & R. Jengo : Trieste report 72/82/EP (1982)
36) 平田 in 8)
37) C. Montonen & D. Olive : *Phys. Lett.*, **72B**, 117 (1977)
38) A. C. Scott, F. Y. F. Chu & D. W. McLaughlin : *Proc. IEEE* **61**, 1443 (1973).

なおソリトンに関しては 6) および 9) 参照

39) H. B. Nielsen & P. Olesen : *Nucl. Phys.*, **B61**, 45 (1973)

40) N. Steenrod : The Topology of Fibre Bundles (Princeton, 1951)

41) C. Kittel : Introduction to Solid State Physics, 5th edition, p. 387 (J. Wiley, 1976)

42) G. H. Derrick : *Journal of Math. Phys.*, **5**, 1252 (1964)

43) S. Coleman, in "Thy Whys of Subnuclear Physics" ed by A. Zichichi (Plenum, 1979)

44) G. 't Hooft : *Nucl. Phys.*, **B79**, 276 (1974)
A. M. Polyakov : *JETP Lett.*, **20**, 194 (1974)

45) J. Arafune, P. G. O. Freund & C. J. Goebel : *Journal of Math. Phys.*, **16**, 433 (1975)

46) M. K. Prasad & C. M. Sommerfield : *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 760 (1975)

47) S. Coleman, S. Parke, A. Neveu & C. M. Sommerfield : *Phys. Rev.*, **D15**, 554 (1977)

48) C. Quigg : Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions (Benjamin, 1983)

49) H. Georgi : Lie Algebras in Particle Physics (Benjamin, 1982)

50) C. Dokos & T. Tomaras : *Phys, Rev.*, **D21**, 2940 (1980)

51) P. Eckert & D. Altschüler : CERN-3661 (1983)